# TD Systèmes linéaires et matrices

## Systèmes linéaires

**Exercice 1** Résoudre les systèmes

1. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$

**Exercice 2** Discuter du nombre de solutions du système en fonction de $p$ :

1. $\begin{cases} 2x+py=p \\ 2px+y=1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+py+2z=1 \\ px+y+2z=p \\ x+2py+3z=0 \end{cases}$

**Exercice 3** Résoudre le système à $n$ inconnues : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1-x_k$.

**Exercice 4** Soit $P\colon x\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $a\neq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y'+ay=P(t)$, d'inconnue $y\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, admet une solution polynomiale $Q$ de degré $\leq n$.

**Exercice 5** ★ ★ Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]}$ une famille de parties non vides de $[\![1,n]\!]$. Montrer qu'il existe deux parties disjointes $I,J$ de $[\![1,n+1]\!]$ telles que $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = \bigcup\limits_{i\in J} X_i$.

**Indication** : *Associer à chaque $X_i$ une inconnue $x_i$, et introduire un système homogène d'équations.*

## Matrices : puissances

**Exercice 6** Soit $(F_n)$ définie par $F_0=F_1=1$ et $\forall n\geq 0, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $X_n=\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer une matrice $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ X_{n+1}=MX_n$.
2. Exprimer $X_n$ en fonction de $n$, $M$ et $X_0$.
3. On admet la relation $M=PDP^{-1}$, où $P=\begin{pmatrix} \varphi & \overline{\varphi} \\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \overline{\varphi}\end{pmatrix}$, $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\overline{\varphi}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

   Donner une expression simple de $X_n$ en fonction de $D^n$.

**Exercice 7** Conjecturer une expression des puissances $n$-ièmes de

1. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} b & a \\ a & b\end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}$

**Exercice 8** Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, déterminer $B^n$.
2. Pour $n\in\mathbb{N}$, en déduire une expression de $A^n$.

**Exercice 9** Calculer les puissances de la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0\end{pmatrix}$
2. $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0\end{pmatrix}$
3. $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0\end{pmatrix}$

**Exercice 10** On dit qu'une matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe un entier $p\geq 0$ tel que $M^p=O_n$.

1. Soit $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que $AB$ et $A+B$ sont nilpotentes.
2. Donner un contre-exemple si $A,B$ ne commutent pas.

**Exercice 11** ★ Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure telle que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|a_{ii}|<1$. Montrer que $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} O_n$, au sens où tous les coefficients tendent vers 0.

**Indication** : *Déterminer une (des) majorations à démontrer sur les coefficients, à commencer par les diagonaux.*

## Matrices : produits matriciels

**Exercice 12** Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer, pour $i,j,k,\ell\in[\![1,n]\!]$ le produit $E_{ij}E_{k\ell}$.
2. Calculer, pour $i,j\in[\![1,n]\!]$, les produits $AE_{ij}$ et $E_{ij}A$.
3. Montrer que $A$ commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A$ commute avec tous les $E_{ij}$.
4. Montrer que les matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices d'homothéties.

**Exercice 13** Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.

**Exercice 14** Soit $G$ un graphe orienté d'ensemble des sommets $V=[\![1,n]\!]$. La matrice d'adjacence $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $G$ est définie par $\forall i,j\in V,\ a_{ij}=\begin{cases} 1 \text{ si } i\to j \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$, où $i\to j$ signifie qu'il existe une arête de $i$ vers $j$.

1. Comment interpréter les coefficients de $A^2$ ?
2. Montrer que $G$ est acyclique ssi $A$ est nilpotente.

**Exercice 15** ♣ Matrices de permutations Si $\sigma\colon [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ est une bijection, on définit $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $(P_\sigma)_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$.

1. Calculer, pour $j \in [\![1,n]\!]$, $P_\sigma E_j$.
2. Montrer que $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes.

**Exercice 16** ★ [ENS 2021] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs. Pour $i, j \in [\![1,n]\!]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A_{ij}^k$ le coefficient d'indices $(i,j)$ de $A^k$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $d_i = \mathrm{pgcd}\{k \mid A_{ii}^k > 0\}$.

1. On suppose $\exists k,\ \forall i,j,\ A_{ij}^k > 0$. Montrer que $d_1 = 1$.
2. On suppose $\forall i,j,\ \exists k,\ A_{ij}^k > 0$. Montrer que les $d_i$ sont égaux.
3. On suppose $\forall i,j,\ \exists k,\ A_{ij}^k > 0$, montrer que si $d_1 = 1$, alors $\exists k,\ \forall i,j,\ A_{ij}^k > 0$.
   **Indication** : *On pourra admettre (ou démontrer) que si $a_1, \dots, a_n$ sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble, tout entier assez grand peut s'écrire comme combinaison linéaire des $a_i$ à coefficients entiers positifs.*

# Matrices inversibles

**Exercice 17** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice avec une ligne ou une colonne de zéros. Montrer que $A$ est non inversible.

**Exercice 18** 🏠 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \geq 1$.

1. Si $A$ est inversible, $A^p$ est-elle nécessairement inversible ?
2. Si $A^p$ est inversible, $A$ est-elle nécessairement inversible ?

**Exercice 19** 🍃 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $A^3 + aA^2 + bA = cI_3$. En déduire que $A$ est inversible, et une expression de $A^{-1}$.

**Exercice 20** 🍃 Déterminer le rang des matrices suivantes. Si elles sont inversibles, calculer l'inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
8. ★ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 21** Soit $A$ une matrice carrée inversible telle que tous les coefficients de $A$ et $A^{-1}$ sont positifs ou nuls. Montrer que chaque ligne et chaque colonne de $A$ comporte un unique coefficient non nul.

**Exercice 22** Soit $A = \big(\min(i,j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que $A$ est inversible et déterminer son inverse.

**Exercice 23** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^p = O_n$. Montrer que $I_n - M$ est inversible, et expliciter son inverse.

**Indication** : *Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$, on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.*

## … et systèmes

**Exercice 24** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $p > n$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^p$ non nul tel que $AX = \vec{0}$.
   Interpréter cette égalité sur les colonnes de $A$. On dit que les vecteurs colonnes de $A$ sont liés.
2. On suppose que $p = n$. Montrer que l'équation $AX = \vec{0}$ admet une solution non nulle si et seulement si $A$ est non inversible.
   **Indication** : *Pour une des implications, justifier que si $\alpha\colon X \mapsto AX$ est non injective, il existe $X$ non nul telle que $\alpha(X) = \vec{0}$.*
3. Énoncer un analogue de la première question si $n > p$, interpréter.

**Exercice 25** 🍃 Éléments propres d'une matrice Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$ admet une solution non nulle ssi $A - \lambda I_3$ est non inversible.
2. Déterminer tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels c'est le cas, et pour chaque valeur, résoudre $AX = \lambda X$.

**Exercice 26** ♣ Matrice à diagonale dominante On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall i \in [\![1,n]\!],\ |a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$.

1. Montrer que l'équation $AX = \vec{0}$ a une unique solution.
2. En déduire que $A$ est inversible.

# Transposée

**Exercice 27** 🍃 Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Donner une CNS simple pour que $AB$ soit symétrique.

**Exercice 28** Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer $X^T Y$. Interpréter géométriquement le résultat.
2. Expliciter $XY^T$. Montrer que si $n \geq 2$, $XY^T$ n'est pas inversible.